An explicit form of Koecher Maass Dirichlet series associated with Siegel Eisenstein series

AUTHOR(S):

伊吹山, 知義; 桂田, 英典

数理解析研究所講究録
965 巻 1996 年 41-51

An explicit form of Koecher Maass Dirichlet series associated with Siegel Eisenstein series

伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama) 大阪大学理学研究科
桂田英典 (Hidenori Katsurada) 室蘭工業大学

1 序

この講演では、Siegel Eisenstein 級数に付随する Koecher-Maass のディリクレ級数の完全に具体的な表示を与えた。結論は後で述べるが、対称行列に付随する概均質ベクトル空間のゼータ関数に関する結果 (H. Saito and Ibukiyama [4]) と非常に似た形（ないしはその発展形とでも言うべきもの）をしている。また、証明の基本的な技術も、若干工夫を要するところはあるが、以前とかなり近いところがある。実際、[4] の途中の結果を全面的に計算に使用している。

1 変数保型形式 f に付随するディリクレ級数 $L(s,f)$ は、もっとも普通には、保型形式 f の Mellin 変換として定義される。$L(s,f)$ は全平面に解析接続され関数等式を持つが一般にはオイラー積を持たない。しかし、さらに f がヘッケ作用素の同時固有関数でもある場合は、f のヘッケ作用素に対する固有値を用いて自然に定義されたディリクレ級数は上記の $L(s,f)$ と一致し、ヘッケ作用素の乗法的性質より自然にオイラー積を持つ。

さて、一般の次元の保型形式に付随するディリクレ級数は、種々考えられている。一般的にはヘッケ作用素の同時固有関数について、その固有値を用いて定義されるものを取り扱うことが多い。これは定義からして最初からオイラー積を持っているが、解析接続や関数等式は一般的に証明されているわけではない。一方、Koecher と Maass は、ジーゲル保型形式に付随する、Mellin 変換をそのまま拡張する形でのディリクレ級数を定義し、その解析接続と関数等式を示した。(cf. [9], [10], [13]) これについては、保型形式のフーリエ展開から直接定義され、関数等式の証明などは比較的容易であるが、たとえ考えている保型形式がヘッケ作用素の同時固有関数であっても、一般にこのディリクレ級数はオイラー積は持たない。そのためか、Boecherer と Shulze-Pillot が精力的に研究しているほかはあまり多くの数学者の興味を引いていなかったようにも思われる。しかし、このディリクレ級数については ヴェイユの逆定理も存在し (K.Imai, Weissauer)、フーリエ級数から直接的に記述されるので、たとえば Maass space の類似のリフティングがあるとすれば、その記述にはより適当である可能性もあり、すくなくとも見かけ上は Langlands 流の定式化とは別の情報を与えている。また、Klingen のアイゼンシュタイン級数を考えれば次元の低いカスプ形式のフーリエ係数の情報が、一般に Koecher Maass の ディリクレ級数を通じて与

えられると言うのは、Boecherer Schulze-Pillot の研究などから考えて、十分ありそうなことのように思われる。

今回の結果は、少なくとも Koecher Maass のディリクレ級数は訳の分からない関数ではなく、かなりきれいな関数、十分考察に値する関数であることを示唆しているように思う。このタイプのディリクレ級数を、非常に一般的に（領域も保型形式も）考えることは保型形式について思いのほか新しい視点を与えることになると考える。

なお、$Sp(n,Z)$ に関するアイゼンシュタイン級数の Koecher Maass ディリクレ級数は実は不定符号２次形式の表現数に関する概均質ベクトル空間のゼータ関数と一致しているので、今回の結果は概均質ベクトル空間のゼータ関数の具体的表示についての研究とも見なせるが、気持ちの上では保型形式の L 関数に力点があり、将来の拡張の方向もそちらで考えている。

2 定義と主定理

n を自然数とし、H_n を n 次ジーゲル上半空間とする。

$$H_n = \{Z = X + iY; X = {}^tX,\ Y = {}^tY \in M_n(R);\ Y > 0\}.$$

ジーゲル上半空間上の $Sp(n,Z)$ に関する正則保型形式 $F(Z)$ に対して、そのフーリエ展開を

$$F(Z) = \sum_{T={}^tT\geq 0} a(F,T)e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

と書く。今 $F(Z)$ の重さ k は偶数であると仮定する。このとき Koecher Maass のディリクレ級数 $L(F,s)$ は、次で定義される。

$$L(s,F) = \sum_{T\in L_{n,+}^*/GL_n(Z)} \frac{a(F,T)}{|Aut(T)|\det(T)^s}.$$

ここで $L_{n,+}$ は n 次正定値半整数対称行列のなす集合、また $GL_n(Z)$ は $L_{n,+}$ に右から $T \to {}^tgTg$ で作用しているとする。和は、$L_{n,+}$ の $GL_n(Z)$ orbit の代表をわたる。また、$\mathrm{Aut}(T) = \{U \in GL_n(Z);\ {}^tUTU = T\}$ とおき、$|\mathrm{Aut}(T)|$ で $\mathrm{Aut}(T)$ の位数を表す。

ここで k が偶数という仮定は、$a({}^tUTU,F) = \det(U)^k a(F,T)$ $(U \in GL_n(Z))$ であるから、$GL_n(Z)$ -orbit 上で $a(F,T)$ が一定にするために必要な条件である。上の定義において $GL_n(Z)$ -orbit を $SL_n(Z)$ orbit に変えれば、一応矛盾なく定義はできるが、このように定義を変えても k が奇数なら、和はゼロになるので、いずれにしろ k が奇数の時は意味のある定義にならない。

ここで定義した $L(F,s)$ は全 s 平面に有理型に解析接続され、また、

$$\xi(s,F) = (2\pi)^{-ns}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma(s-i/2)\right)L(s,F)$$

とおくと　関数等式

$$\xi(k-s,F) = (-1)^{nk/2}\xi(s,F)$$

を満たすことが知られている。([13])

さて、$k > n+1$ となる偶数 k に対して $Sp(n,Z)$ に関する H_n 上の重さ k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^n(Z)$ は

$$E_k^n(Z) = \sum_{\{C,D\}} \det(CZ+D)^{-k}$$

で定義される。ここで、$\{C,D\}$ はいわゆる symmetric coprime pair の associate class の代表（左 $GL_n(Z)$ 同値類の代表）をわたる。以下、簡単のため $L(s, E_k^n) = \xi_{n,k}(s)$ と略記する。このアイゼンシュタイン級数のフーリエ展開に関する歴史は、ジーゲル以来長年にわたっているが、未だにフーリエ係数の正確な具体的公式は $n \leq 3$ でしか記述されていない。（$n=1$ は古典的、$n=2$ は Siegel と Maass、$n=3$ は [6], [5] による。n 一般は漸化式に関する北岡氏の研究がある。いずれにせよ、いまだにあまり易しい問題とはいえないようである。）従って、$\xi_{n,k}(s)$ を求めるのに直接フーリエ係数を使うことはできない。フーリエ係数の一種の平均値である$\xi_{n,k}(s)$ の方が易しく記述できるわけである。

主定理を述べるためにいくつか記号を準備する。有理数体上の２次拡大 K に対して、d_K でその判別式をあらわす。また、χ_K でその体に対応するディリクレ指標をあらわす。また、$K = Q \oplus Q$ のときも考えにいれてこの場合は $d_K = 1$ および $\chi_K = 1$ とおくことにする。まとめると、$\chi_K(m) = (\frac{d_K}{m})$ となるわけである。ただし、$(\frac{d_K}{*})$ は Kronecker 記号である。

任意の半整数 $\kappa > 2$ に対して、ディリクレ級数 $D_{2\kappa-1}^*(s)$ を

$$D_{2\kappa-1}^*(s) = \sum_{(-1)^{\kappa-1/2}d_K>0} |d_K|^{-s} L(3/2-\kappa, \chi_K) \frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2\kappa+2)}{L(2s-\kappa+\frac{3}{2}, \chi_K)}$$

で定義する。ここで、和は２次体 K および $K = Q \oplus Q$ のうちで $d(K)$ に関する符号条件 $(-1)^{\kappa-1/2}d_K > 0$ を満たすものをわたる。また $\zeta(s)$ および $L(s,\chi_K)$ でリーマンゼータ関数およびディリクレの L 関数をあらわす。ここでディリクレ級数の添え字を κ ではなくて $2\kappa-1$ としたのは、重さ半整数の保型形式と重さ整数の保型形式の間の志村対応を考えた時の整数 weight の方で表示しようとしたからである。実際 $D_{2\kappa-1}^*(s)$ は重さ κ のある１変数アイゼンシュタイン級数 (Cohen の与えたもの）の Mellin 変換として得られるものになっている。

さて、次に L 関数の convolution product を定義する。これらのディリクレ級数はオイラー積を持たないので、「ヘッケ作用素の固有値の積の組み合わせ」で定義するわけではない。普通の定義を参考にして係数を直接見ることにするのである。半整数 κ_1 と κ_2 をとり、$i = 1, 2$ のそれぞれに対して、上で定義したディリクレ級数の係数を

$$D_{2\kappa_i-1}^*(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_i(m)}{m^s}$$

のように書くことにする。この２つのディリクレ級数 $D_{2\kappa_1-1}^*(s)$ と $D_{2\kappa_2-1}^*(s)$ の convolution product を

$$D_{2\kappa_1-1}^*(s) \otimes D_{2\kappa_2-1}^*(s) = \zeta(2s-\kappa_1-\kappa_2+2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_1(m)a_2(m)}{m^s}.$$

で定義する。

一般に m 番目のベルヌーイ数 B_m を

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}t^m$$

で定義する。以上の記号の準備のもとで、われわれの主定理は次のように述べられる。上半空間の次数 n のパリティによって結果が非常に違うので、分けて述べる。

定理 1
n が偶数と仮定する。この時

$$\begin{aligned}\xi_{n,k}(s) &= (-1)^{nk/2}2^{ns+n/2}\times\frac{\prod_{i=0}^{n/2}(k-i)\prod_{i=1}^{n/2-1}|B_{2i}|}{(\frac{n}{2}-1)!|B_k|\prod_{i=1}^{n/2}|B_{2k-2i}|}\\ &\times\ \{(-1)^{(n+k)/2}(D_n^*(s)\otimes D_{2k-n}^*(s))\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)\\ &+\ \delta_{4,n}(-1)^{n(n+2)/8}\times\frac{|B_{n/2}B_{k-n/2}|}{(n/2)(k-n/2)}\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i)\}\end{aligned}$$

となる。ただしここで $n\equiv 2 \bmod 4$ ならば $\delta_{n,4}=0$, $n\equiv 0 \bmod 4$ ならば $\delta_{n,4}=1$ とおいた。

この定理は $n=2$ では、Maass [11], [12] などによるフーリエ係数の公式があるのであるから、直接計算することもできる。実際、Boecherer はその場合に昔計算している (cf. [1])。われわれの結果はその拡張という言い方もできるであろう。

定理 2
n が奇数と仮定する。この時

$$\begin{aligned}\xi_{n,k}(s) &= (-1)^{nk/2}2^{(n-1)s}\frac{\prod_{i=0}^{(n-1)/2}(k-i)}{(\frac{n-1}{2})!}\times\frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2i}|}{|B_k|\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2k-2i}|}\\ &\times\ \{\zeta(s)\zeta(s-k+1)\prod_{i=1}^{(n-1)/2}((\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1))\\ &+\ (-1)^{(n^2-1)/8}\zeta(s-\frac{n-1}{2})\zeta(s-k-\frac{n+1}{2})\prod_{i=1}^{(n-1)/2}(\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i))\}\end{aligned}$$

となる。

この定理で $n=3$ の場合はフーリエ係数は知られているから、$\xi_{n,k}(s)$ をそれから直接計算することもできる。実際、一般論に先立って、このような計算は実行してみた。

さて、以上の結果より、関数等式の直接的な別証も得られることになる。

3 フーリエ係数の公式と証明の出発点

前の節で述べたように、$E_n^k(Z)$ のフーリエ係数の完全に具体的な公式は今に至るも存在していないが、一般的な公式はいくつかある。たとえば Siegel は、論文 [14] において、フーリエ係数の有理性を証明している。これを改良した公式が Siegel [15] に与えられている。おおざっぱに言って、フーリエ係数はある2次形式に関する local density の積で与えられると言うものである。この公式がわれわれの計算の出発点であるので、以下これを説明する。一般に整数係数の対称行列で m 次のもの S と n 次のもの T に対して、

$$A_{p^\nu}(T,S)=\{X\in M_{mn}(Z/p^\nu Z);\ {}^tXSX\equiv T \bmod p^\nu\}$$

とおく。S から T への local density $\alpha_p(S,T)$ というのは、

$$\alpha_p(S,T)=2^{-\delta_{m,n}}\lim_{\nu\to\infty}p^{(n(n+1)/2-mn)\nu}|A_{p^\nu}(S,T)|.$$

で定義される。実は local density の定義にはいくつか流儀があるが、われわれは Siegel のもとの記号を採用している。上の定義で、リミットの中身は ν が十分大きいところで一定になることはよく知られているので、矛盾なく定義されている。

いくつか記号の定義を追加する。任意の自然数 m に対して、

$$\rho_m=\prod_{i=1}^m\frac{\pi^{i/2}}{\Gamma(i/2)},$$

とおく。ただし $\Gamma(s)$ は普通のガンマ関数である。また、$2k$ 次の行列 H_k を

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

の k 個の直和で定義する。

定理 3 (Siegel)
任意の正定値半整数対称行列 T に対して、$E_k^n(Z)$ のフーリエ係数 $a(T)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}a(T)&=(-1)^{nk/2}\frac{\rho_{2k}}{\rho_{2k-n}}|2T|^{(2k-n-1)/2}\lim_{q\to\infty}q^{n(n+1)/2-mn}A_q(H_k,2T)\\&=(-1)^{nk/2}\frac{\rho_{2k}}{\rho_{2k-n}}|2T|^{(2k-n-1)/2}\prod_{p<\infty}\alpha_p(H_k,2T).\end{aligned}$$

この公式により、あきらかに、$a(T)$ は $2T$ の属する genus にしかよらないことがわかる。ここで、$2T$ の属する genus $\mathcal{L}$ というのは、対称行列 W で、任意の素点 v に対して、ある $g\in GL_n(Z_v)$ があって、${}^tgWg=2T$ となるようなもの全体の集合のことである。ただし、$v=\infty$ のときは、$Z_v=R$ とおいた。ここで $2T$ は、even integral（対角成分が偶数）となっている。都合により半整数対称行列より偶整数対称行列 (even integral symmetric) を扱う方が多少わかりやすい点もあるので、以下では上の $2T$ のことをむしろ T と書くことになろう。

さて、以上により偶整数対称行列内の genus $\mathcal{L}$ ごとに和をとることにすると、

$$\sum_{T\in\mathcal{L}/GL_n(Z)} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}$$

の部分がくくり出せることになる。この部分はいわゆる Minkowski-Siegel の Mass formula で、公式が知られている。やはり local density の積で与えられるわけである。すなわち、上記の Mass は、

$$\frac{2|d(\mathcal{L})|^{(n+1)/2}}{\rho_n \prod_{p<\infty} \alpha_p(T(\mathcal{L}),T(\mathcal{L}))}$$

である。ただし、$T(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の任意の元をひとつとり、$d(\mathcal{L}) = \det(T(\mathcal{L}))$ とおいた。もちろん上記の local density はこの取り方によらないし、行列式も $\mathcal{L}$ に属する元では共通な値を持つ。以上の考察と記号のもとに、実は

$$\xi_{n,k}(s) = (-1)^{nk/2}2^{ns+1}\frac{\rho_{2k}}{\rho_n\rho_{2k-n}}\sum_{\mathcal{L}}\prod_{p<\infty}\frac{\alpha_p(H_k,T(\mathcal{L}))}{\alpha_p(T(\mathcal{L}),T(\mathcal{L}))}d(\mathcal{L})^{k-s}$$

という公式が得られる。ここで $\mathcal{L}$ は偶整数対称行列の集合 $S_n(Z)_{e,+} = \{T\in S_n(Z)_e; T>0\}$ の部分集合となる genus の全体をわたる。

以上が局所的な計算に帰着するための出発点である。[4] では、$\alpha_p(H_k,T(\mathcal{L}))$ の部分がなかった点が以上と異なっている。この部分が増えたことによる技術的な問題が多少ある。これは次の節で述べる。

4 局所的な計算への帰着のしかた

一見前節の公式ですべてが局所的な量に帰着されたかに見えるが、ひとつ問題がある。それは genus はそれ自身としては global な量だという点である。従って、どのような局所的な同値類が、大域的な対称行列からくるかという点が記述できなければならない。これは、有理数体上の場合と同じく、簡単な考察により、局所的な Hasse invariant の積が 1 という条件ですむ。Hasse invariant の積が 1 になるような部分だけを取り出す簡便な方法はすでに [4] で経験済みであり、次のようにする。$\phi_p(T)$ を $GL_n(Z_p)$ の作用で不変な $S_n(Q_p) = \{T = {}^tT \in M_n(Q_p)\}$ 上の関数とする。$d\in Z_p$ に対して、

$$\gamma_p(d,\phi_p,H_k) = \sum_T \frac{\alpha_p(H_k,T)\phi_p(T)}{\alpha_p(T,T)}$$

とおく。ただし、T は $M_n(Z_p)$ 内の対称行列で対角成分が $2Z_p$ に属するもので、$\det(T)=d$ のものの、$GL_n(Z_p)$ 同値類の全体をわたるとする。さて、関数の族 $\phi = \{\phi_p\}_p$ に対して、

$$\lambda_k(d,\phi) = \prod_p \gamma_p(d,\phi_p,H_k)$$

とおき、

$$\xi_{n,k}(s,\phi) = \sum_{d=1}^{\infty}\lambda_k(d,\phi)d^{k-s}$$

とおく。さて、ι で自明な（恒等的に 1 の）関数の族を、また、ϵ で局所的な Hasse invariant ϵ_p の与える族 $\{\epsilon_p\}$ 表すことにすると、以上の考察より簡単に

$$\xi_{n,k}(s) = (-1)^{nk/2} 2^{ns} \frac{\rho_{2k}}{\rho_n \rho_{2k-n}} (\xi_{n,k}(s,\iota) + \xi_{n,k}(s,\epsilon))$$

となることがわかる。以上は [4] の議論そのままである。$\xi_{n,k}(s,\phi)$ のそれぞれを求めるために $d_0 \in Z_p^\times$ に対して

$$D(X, d_0, \phi_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_p(p^m d_0, \phi_p, H_k) X^m$$

を考えて計算するという点もまえと同じである。正確に言えば、局所的に計算してみて、でてきた結果を大域的にもう一度再構成することになるわけだが（つまり単純に積をとったりするわけではない。この点もまえとおなじだが。）

5 局所的な計算の出発点

前節までで一応局所的な計算に帰着するわけだが、次の点が複雑である。$\alpha_p(H_k, T)$ は T が unimodular でなければ、はっきりした公式は知られていない。（もしこれがわかればアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の公式がわかるが、これは一般にはわかっていない。）ここをうまく計算したいが、今は$\alpha_p(T,T)$ で割っているのでかえって都合がよく、局所的なディリクレ級数が積分でかける。別に積分で書いただけで進歩するわけではないが、少し積分変換すると"primitive density" に帰着できることがわかる。これがひとつのポイントである。これを説明しよう。後の都合のために少し記号を定義する。任意の $1 \le r \le n$ となる整数 r にたいして、$M_{2k,n}^r(Z_p)$ を、$X \in M_{n,k}(Z_p)$ でかつ $X \bmod p$ の最初の r 列が Z/pZ 上線形独立なもの全体の集合とする。特に $M_{2k,n}^0(Z_p) = M_{2k,n}(Z_p)$ である。今のような r と $d_0 \in Z_p^\times$ に対して、

$$\Omega_r(H_k, d_0) = \{X \in M_{2k,n}^r(Z_p) : \det(H_k[X]) \in d_0 p^m (Z_p^\times)^2 \text{ for some } m\}$$

と定義する。ここで Siegel の慣用の記号 $A[B] = {}^tBAB$ をもちいた。また、ϕ_p を前と同じく、$S_n(Q_p)$ 上の $GL_n(Z_p)$ 不変な関数として、

$$I_r(H_k, d_0) = \int_{\Omega_r(H_k, d_0)} \phi_p(H_k[X]) |\det(H_k[X])|_p^s dX$$

ただし、$|*|_p$ は乗法付値、また $X \in M_n(Q_p)$ にたいし $dX = \prod_{1\le i\le 2k,\ 1\le j\le n} dx_{ij}$ としている。0 以上の整数 l と変数または数 q に対して、$(q)_l = \prod_{i=1}^{l}(1-q^i)$（ただし $l=0$ なら $(q)_0 = 1$）とおくと

$$D(p^{-s}, d_0, \phi_p) = 2(p^{-1})_n^{-1} I_0(H_k, d_0)$$

となることはよくしられているし、証明も容易である。(e.g. [2]) ところが、ϕ_p がさらに $GL_n(Q_p)$ の作用でも不変であると仮定すると（たとえば ι や ϵ_p ならそうなわけだが）、次の key lemma が得られる。

補題 1 以上の仮定と記号のもとで次がなりたつ。

$$I_r(H_k, d_0) = (1 - p^{r-2k-2s})^{-1} I_{r+1}(H_k, d_0).$$

証明は略すが、$\Omega_r(H_k, d_0)$ の元の第 $r+1$ 列に着目してこれの最初の r 列での表され方で部分にわけ、簡単な積分変換を行えばよい。

この補題により、局所的なディリクレ級数は $I_n(H_k, d_0)$ に帰着するが、この積分をさらに対称行列上の積分に帰着できれば [4] の結果が使えて都合がよい。これを直接行うのは、$p=2$ の時などは積分変換がかなりややこしくなってしまうので、いったん primitive local density に戻してやるとこのような複雑さは回避できる。すなわち even integral な T にたいして、$r(H_k, T)$ で F_p 上の 2 次形式 $H_k[x]/2 \bmod p$ から $T[y]/2 \bmod p$ への（F_p 上の）isometry 全体の個数を表すと（これはすなわち $H_k[X] - T$ が p かける even symmetric となるような primitive な行列 modulo p の個数であるが）、これによって積分が表される。実際、今 Z_p 上のサイズ r の even integaral symmetric matrices の集合 $S_r(Z_p)_e$ 上の $GL_r(Z_p)$ 不変な関数に対し f に応じて新しいディリクレ級数 ζ_r^* を

$$\zeta_r^*(u, f, d_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{T \in S_r(Z_p)_e/GL_r(Z_p) \\ \det(T) = d_0 p^m}} \frac{f(T)}{\alpha_p(T,T)} |\det(T)|_p^s$$

で定義する。ただし $u = p^{-s}$ とおいた。また $\zeta_0^* = 1$ としておく。ここで特に$\phi_p = \epsilon_p$ または $\phi_p = \iota$ に対して $f(T) = \phi_p(T) r(H_k, T)$ で定義すると、このときそれぞれの ϕ に応じて

$$D(u.\phi_p, d_0) = 2^{n\delta_{p,2}} p^{n(n+1)/2 - mn} \prod_{i=1}^{n} (1 - p^{i-1-2k-2s})^{-1} \zeta_n^*(u, \phi_p, d_0)$$

となる。

このように書けるとどこが良いかというと、$r(H_k, T)$ の公式が知られているという点が都合がよい。(cf. e.g. [8])（このあたりの論法は実は H_k が unimodular という点を使っている。）この説明をしないと [4] への帰着の仕方があまりはっきりしないと思うので、少しだけ説明する。一般に 2 次形式の Jordan 分解の理論により、

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & pT_1' \end{pmatrix}$$

(T_1 は unimodular T_1' は整数行列）とかける。$p \neq 2$ なら、簡単で、T_1, T_1' の同値類が T から決まり、事実上両者をほぼ分離して扱える。ここで、$p = 2$ なら、T_1 と T_1' の属する $GL_n(Z_p)$ 同値類は T のみでは決まらないが、T_1 のサイズ ($n - r$ とする) や、T_1, T_1' が even か否かは、T のみで決まる。

さて、任意の整数 r で $0 \leq r \leq n$ となるものにたいして、

$$c(r) = p^{2kn - n(n+1)/2}(1 - p^{-k}) \prod_{i=1}^{n - [(n-r)/2] - 1} (1 - p^{2i-2k}).$$

とおく。

補題 2 (cf. [8]) 次の公式を得る。

$$r(H_k, T) = c(r) \times \begin{cases} (1 + \chi_{n-r}(d_1) p^{(n+r)/2-k}) & \textit{...if } p \textit{ is odd or } T_1' \textit{ is even integral,} \\ 1 & \textit{...if } p = 2 \textit{ and } T_1' \textit{ is odd,} \end{cases}$$

ただし、ここで $d_1 = \det(T_1)$ とおき、また、

$$\chi_r(d) = \begin{cases} ((-1)^{r/2} d, p)_p & \text{... if } r \text{ is even } r \geq 2, \\ 0 & \text{... if } r \text{ is odd,} \\ 1 & \text{... if } r = 0 \end{cases}$$

とした。$(x, y)_p$ はヒルベルト記号である。

とくに $p \neq 2$ なら、$r(H_k, T)$ は r と d_1 にしかよらないから、T_1 と T_1' を分解して考えやすい。($p = 2$ でもたいして違わない。) これを用いて $\zeta_n^*(u, f, d_0)$ を計算するにはいま少しトリックが必要である。まず求めたいディリクレ級数は $GL_n(Z_p)$ 上の同値類で和をとっているが、これを、対称行列上の和に戻すのは簡単である。しかし Jordan 分解を固定して、各 Jordan 分解のブロックの形に応じた対称行列上での和にとりなおせるというテクニックを使う ([4] Lemma 3.1, 3.2 がそのまま使える)。すると結局、大ざっぱに言って上の記号で言えば T_1 の部分と T_1' の部分に和を分解するような形になる。($p = 2$ ならもう少し複雑だが。) T_1 の部分については $Z_p/p^\nu Z_p$ での unimodular 行列の個数を数えるような形になるが、これはすでに [4] でわかっている。T_1' の部分については、$p \neq 2$ なら $\zeta_r^*(u, \phi_p, d_0 d_1^{-1})$ (ϕ_p は ι または ϵ_p) にほぼ帰着するので、$r(H_k, T)$ の公式などから来るずれの部分や、T と T_1 や T_1' の Hasse invariant のずれなどによく注意して、$\zeta_n^*(u, f, d_0)$ を書き換えれば、$\zeta_r^*(u, \phi_p, d_0 d_1^{-1})$ に少し複雑な係数がついた式を、$r = 0...n$ および $d_1 \in Z_p^\times/(Z_p^\times)^2$ について和をとったものになる。($p = 2$ ならもう 1 種類ゼータを考える必要が生じるが。) ここで、$\zeta_r^*(u, \phi_p, d_0)$ はすでに [4] で計算されているのでそれを用いればよく、$p = 2$ の複雑さは Hasse invariant の処理のみとなり、本質的に p が奇数の時とあまり変わらないともいえる。(もちろんいずれにせよ例外的な計算になるが。)

6 あとがき

以上により、あとは計算を実行すればよく、実行した結果についてはすでに述べた。もちろん計算はそれなりに面倒であって、きちんと計算することはかなり本質的であると思う。計算が完了しない限り結果が綺麗であると保証されているわけではないからである。実際、当初何人かの専門家は結果が綺麗だという筆者の予測にかなり否定的であったと記憶している。計算の詳しい内容は論文にゆずる。なお、途中で、ディリクレ級数の和をまとめるために q-analysys の式

$$(1 - p^{-2k}u^2)(1 - p^{-2k+2}u^2)....(1 - p^{-2k+2l-2}u^2)$$

$$= \sum_{r=0}^{l} \frac{(p^{-2})_l}{(p^{-2})_r (p^{-2})_{l-r}} \prod_{i=0}^{r-1} (1 - p^{-2k+2i+2l}) \prod_{i=1}^{l-r} (1 - p^{2i-2l-2}u^2) p^{-2r^2} u^{2r}$$

などを用いる（証明は容易である。）全体として、見かけは [4] より複雑だが、[4] の結果が引用できるという点では計算が楽な面もあった。なお、convolution product になるという部分は、計算した結果をよくみて（意味があって綺麗なはずだと信じて）解釈を探すとそうなっているというのであって、計算する前からわかるわけではない。

以下で文献は主要なものにとどめた。詳しくは準備中の論文 [3] を参照されたい。

参考文献

[1] S. Boecherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß. Mathematica Gottingensis Schriftenreihe des SFB. Geometrie und Analysis Heft 68(1986).

[2] S. Boecherer and F. Sato, Rationality of certain formal power series related to local densities, Commentarii Math. Univ. Sancti Pauli 36(1987), 53-86.

[3] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher Maass Series for Siegel Eisenstein series, in preparation.

[4] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I, Amer. J. Math. 117 (1995), 1097-1155.

[5] H. Katsurada, On the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree 3, preprint.

[6] Y. Kitaoka, Fourier coefficients of Eisenstein series of degree 3, Proc. Japan Acad., 60, Ser. A (1984) 259-261.

[7] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series. Nagoya Math. J., 103(1986), 149-160.

[8] Y. Kitaoka, Arithmetic of quadratic forms, Cambridge University Press. 1993.

[9] M. Koecher, Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. Reine Angew. Math. 192(1953), 1-23.

[10] M. Koecher, Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen, Math. Nachr. 9 (1953), 51-85.

[11] H. Maaß, Uber Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 34(1964), 1-25.

[12] H. Maaß, Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, ibid. 38 (1972) 1-13.

[13] H. Maaß, Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series, Springer Lecture Notes in Math. 216, 1971, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg NewYork.

[14] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. 116 (1939), 617-657; Gesammelte Abhandlungen no. 32, vol II.

[15] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen, Math.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 34 (1964); Gesammelte Abhandlungen, no.79, vol.III, 443-358.